01/03/2019

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου E. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας.

Ορισμός: ① Το $\lambda \in \mathbb{K}$ καλείται ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ και τότε το $\vec{x}$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του f το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

$A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad f_A(X) = AX$ ενδομορφισμός του $\mathbb{K}^n$
② Το $\lambda \in \mathbb{K}$ καλείται ιδιοτιμή του πίνακα $A \Leftrightarrow$ το λ είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού $f_A \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n, X \neq 0 : f_A(X) = \lambda X$, δηλαδή $AX = \lambda X$ και τότε το X καλείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή τιμή λ.

Ορισμός: ① Αν λ ιδιοτιμή του f, τότε το σύνολο:
$V(\lambda) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$ = σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων του f που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda \cup \{0\}$ καλείται ο ιδιοχώρος του f, ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

② Αν λ ιδιοτιμή του A, τότε το σύνολο $V(\lambda) = \{\vec{X} \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\} =$
= σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda \cup \{0\}$ καλείται ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί

στην ιδιοτιμή λ

6) Παρατήρηση: Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια βάση $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ του E η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f που αντιστοιχούν σε κάποιες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Τότε:

$$\left.\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \lambda_1 \vec{e_1} \\ f(\vec{e_2}) = \lambda_2 \vec{e_2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ f(\vec{e_n}) = \lambda_n \vec{e_n} \end{cases}\right\} \Rightarrow M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

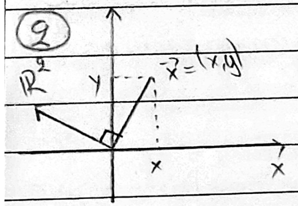
$$\forall \vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n} \Rightarrow f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n})$$

7) Παρατήρηση: 0: ιδιοτιμή του $f \Rightarrow \exists \vec{x} \in E$ $\vec{x} \neq \vec{0}$: $f(\vec{x}) = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \vec{0} \neq \vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow Ker(f) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f$: δεν είναι μονομορφισμός $\Leftrightarrow$ (αν $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$) f δεν είναι ισομορφισμός.

Πόρισμα: 0: ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \exists 0 \neq X \in \mathbb{K}^n$: $AX = 0X = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |A| = 0$ (ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος)

Παραδείγματα: ① Έστω ο ενδομορφισμός $f_k: E \to E$, $f_k(\vec{x}) = k\vec{x}$ (ομοθεσία με λόγο $k \in \mathbb{K}$). Τότε το k: ιδιοτιμή του f_k και $V(k) = E$ δηλαδή κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του E είναι ιδιοδιάνυσμα του f_k που αντιστοιχεί στο k.

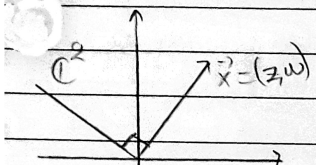
②



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (-y, x)$

Έστω ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του $f \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (x,y) \neq (0,0)$: $f(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (-y, x) = (\lambda x, \lambda y)$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x = -y \\ \lambda y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 y = -y \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 y + y = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \underbrace{(\lambda^2 + 1)}_{\neq 0} y = 0 \Rightarrow y = 0$ και τότε $x = 0$ Άτοπο!

Άρα δεν υπάρχει ιδιοτιμή λ του f => ο ενδομορφισμός f δεν έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$.



$f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(z,\omega)=(-\omega,z)$

Έστω ότι $\lambda\in\mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του f, τότε $f(z,\omega)=\lambda(z,\omega)$ για κάποιο $(0,0)\neq(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$.

Τότε $(-\omega,z)=(\lambda z,\lambda\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda z=-\omega \\ \lambda\omega=z \end{cases} \Rightarrow (\lambda^2+1)\omega=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2+1=0 \\ \text{ή} \\ \omega=0 \Rightarrow z=0 \text{ άτοπο, διότι } (z,\omega)\neq(0,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$

<u>Αντίστροφα</u>: το $\lambda=i$ και το $\lambda=-i$ ικανοποιεί τον ορισμό ιδιοτιμής του f

<u>Άρα</u>: ο f έχει ως ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$ τους αριθμούς $i,-i$ ενώ στο $\mathbb{R}$ δεν έχει ιδιοτιμές.

• $\lambda_1=i$. Τότε $z=i\omega \Rightarrow (z,\omega)=(i\omega,\omega)=\omega(i,1)$ όπου $\omega\neq0$

Άρα $V(i)=\{\omega(i,1)\in\mathbb{C}^2 / \omega\in\mathbb{C}\}=\langle(i,1)\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow (i,1)$ βάση του ιδιοχώρου $V(i)$

• $\lambda_2=-i$. Τότε $-iz=-\omega \Rightarrow \omega=iz$ και άρα $(z,\omega)=(z,iz)=$
$=z(1,i)$ και άρα αν $z\neq0 \Rightarrow z\cdot(1,i)$ ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-i \Rightarrow V(-i)=\{z(1,i)\in\mathbb{C}^2/z\in\mathbb{C}\}=$
$=\langle(1,i)\rangle$, δηλαδή $(1,i)$ βάση του $V(-i)$

• Έστω $\vec{e_1}=(i,1)$, $\vec{e_2}=(1,i)$. Τότε $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}=e$ βάση του $\mathbb{C}^2$ διότι

$$\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}=-2\neq0$$

Τότε: $f(\vec{e_1})=i\vec{e_1}$, $f(\vec{e_2})=-i\vec{e_2} \Rightarrow M_e^e(f)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ διαγώνιος

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (4x-y, 2x+y)$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του $f \Rightarrow \exists (x,y) \neq (0,0) : f(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (4x-y, 2x+y) = (\lambda x, \lambda y) \Rightarrow \begin{cases} 4x-y = \lambda x \\ 2x+y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x = y \\ 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + (1-\lambda)(4-\lambda)x = 0 \Rightarrow x(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

Αν $x=0$ τότε θα είχαμε $y=0$ Άτοπο!

Άρα $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$, $\lambda = 3$

Άρα ο f έχει δύο ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$

• $\lambda_1 = 2$. Τότε $\begin{cases} 4x-y = 2x \\ 2x+y = 2y \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

Άρα $(x,y) = (x, 2x) = x(1,2)$ και για $x \neq 0$ το $x(1,2)$ ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$

$V(2) = \{ x(1,2) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \} = \langle (1,2) \rangle$

• $\lambda_2 = 3$. Τότε $\begin{cases} 4x-y = 3x \\ 2x+y = 3y \end{cases} \Rightarrow x = y$

Άρα $(x,y) = (x,x) = x(1,1)$ και για $x \neq 0$ το $x(1,1)$ ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$.

$V(3) = \{ x(1,1) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1) \rangle$

$\vec{e_1} = (1,2)$, $\vec{e_2} = (1,1)$ τότε $\mathcal{E} = \{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \}$ βάση του $\mathbb{R}^2$, διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Τότε $\left. \begin{array}{l} f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} \\ f(\vec{e_2}) = 3\vec{e_2} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ διαγώνιος

→ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-y, x)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ όταν δίνεται πίνακας θα πρέπει να ξέρω πάνω από ποιο σώμα δουλεύω. Αν δε μου λέει το κάνω και στο $\mathbb{C}$ και στο $\mathbb{R}$.

Ορίζουσα Ενδομορφισμού

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου και έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.

Ορισμός: Η ορίζουσα του ενδομορφισμού f ορίζεται να είναι η ορίζουσα του πίνακα A του f σε μία τυχαία βάση $\mathcal{B}$ του E:

$$\mathrm{Det}(f) \overset{\text{ορ}}{=} |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)|$$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης.

→ Έστω $\mathcal{C}$: βάση του E. Θα δείξω ότι $|M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = |M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)|$

Οι πίνακες $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ είναι όμοιοι $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$: $P^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)| = |P^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P| = |P^{-1}| \, |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| \cdot |P| =$$

$$= \underbrace{|P|^{-1} |P|}_{=1} \, |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)|$$

Παρατήρηση: Ο ενδομορφισμός f είναι μονομορφισμός $\Leftrightarrow$ ο f είναι επιμορφισμός $\Leftrightarrow \mathrm{Det}(f) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$: ισομορφισμός.

Πρόταση: Το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Det(f-\lambda Id_E)=0$
όπου $f-\lambda Id_E : E \to E$, $(f-\lambda Id_E)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda\vec{x}$

Απόδειξη: $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$:
$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{0} \neq \vec{x} \in E : (f-\lambda Id_E)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{0} \neq \vec{x} \in Ker(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow Ker(f-\lambda Id_E) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ο $f-\lambda Id_E$ δεν είναι ενδομορφισμός $\overset{\text{παρατήρηση}}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow Det(f-\lambda Id_E)=0$

$\rightarrow$ Αν $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E, τότε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f-\lambda Id_E) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f-\lambda I_n)$$

Άρα, αν $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, τότε: λ ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{|A-\lambda I_n| = 0}$

Ορισμός: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_f(t)$ του ενδομορφισμού f ορίζεται να είναι το πολυώνυμο:
$P_f(t) = |A - tI_n|$, όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι ο πίνακας του

ενδομορφισμού f σε τυχούσα βάση του E.
Οι ρίζες του $P_f(t)$ στο $\mathbb{K}$ είναι οι ιδιοτιμές του f.

Παράδειγμα ① Έστω $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ βάση του E. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ο πίνακας του f στη βάση $\mathcal{B}$.

Τότε $P_f(t) = |A - tI_2| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}t - a_{22}t - a_{12}\cdot a_{21} + t^2 =$$

$$= t^2 - (a_{11}+a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t^2 - Tr(A)\,t + |A|$$

② **Γενικότερα:** $P_f(t) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$= (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$,
όπου $A = (a_{ij})$ ο πίνακας του ενδομορφισμού f σε τυχούσα βάση β του E

Τότε $P_f(t) = |A - tI_n| \Rightarrow P_f(0) =$ σταθερός όρος του $P_f(t) = |A - 0I_n| =$
$= |A|$

Άρα: 0 ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow P_f(0) = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$

→ Έστω λ ιδιοτιμή του f. Έστω $\beta: \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E

Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n} \in E$

Τότε $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}$ και $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow f(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) = \lambda(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) = \lambda x_1\vec{e_1} + \dots + \lambda x_n\vec{e_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1(a_{11}\vec{e_1} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}) + \dots + x_n(a_{1n}\vec{e_1} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}) =$
$\lambda x_1\vec{e_1} + \dots + \lambda x_n\vec{e_n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e_1} + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)\vec{e_n} = \lambda x_1\vec{e_1} + \dots + \lambda x_n\vec{e_n}$

$\Leftrightarrow (a_{11}x_1 - \lambda x_1 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e_1} + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n - \lambda x_n)\vec{e_n} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda I_n)X = 0$$

Άρα το $\vec{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ $\Leftrightarrow$ οι συνιστώσες του στη βάση β είναι μη-μηδενική λύση του (Σ)

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x+z, y, x+2z)$

$\beta = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= f(1,0,0) = (2,0,1) = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 1\vec{e_3} \\ f(\vec{e_2}) &= f(0,1,0) = (0,1,0) = 0\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 0\vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) &= f(0,0,1) = (1,0,2) = 1\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - tI_3 = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

Τότε $P_f(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} =$

$$= (1-t)\left((2-t)^2 - 1\right) = t^2 - 4t + 3 = -(t-1)(t-1)(t-3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_f(t) = -(t-1)^2(t-3)$

Άρα οι ιδιοτιμές του f είναι $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας 2 και $\lambda_2 = 3$ πολλαπλότητας 1.

- $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow x = -z$$

Γενική λύση: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x,y \in \mathbb{R}$

Άρα (x,y,z) ιδιοδιάνυσμα του $f \Leftrightarrow (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,0)$
όπου $(x,y) \neq (0,0)$

Άρα $V(1) = \{x(1,0,-1) + y(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 / x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1), (0,1,0) \rangle$

Άρα $\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$ βάση του $V(1)$

- $\lambda_2 = 3$